



Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



Кафедра
математичної фізики
та диференціальних
рівнянь

Диференціальна геометрія

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

1. Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	Е Природничі науки, математика та статистика
Спеціальність	Е7 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	За вибором
Форма навчання	очна(денна)
Рік підготовки, семестр	2 курс, весняний семестр
Обсяг дисципліни	120 год (4 кредити ЄКТС, 16 годин лекції, 30 годин - практичні, 74 годин -СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік. Модульна контрольна робота, розрахункова робота, захист виконаних робіт
Розклад занять	Лекції– раз на 2 тижні / практичні заняття– щотижня rozklad.kpi.ua
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: Селезньова Надія Петрівна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, кандидат. фіз.-мат. наук nadijasel@gmail.com
Розміщення курсу	https://mph.kpi.ua/

2. Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою навчальної дисципліни є ознайомлення з основними поняттями та положеннями диференціальної геометрії, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами застосування диференціального числення та лінійної алгебри до дослідження геометричних властивостей кривих та поверхонь, що дасть можливість розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми професійної діяльності у сучасних новітніх технологіях та комп'ютерному дизайнові матеріалів, використовувати методи топології в розрахунках.

Програмні компетентності:

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

ЗК 02 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях

ЗК 03 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності

ЗК 07 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями

ЗК 08 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел

ЗК 09 Здатність приймати обґрунтовані рішення

ЗК 11 Здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань)

ЗК 12 Здатність працювати автономно

ЗК13 Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків

ЗК 17 Здатність адаптуватися і діяти в нових умовах, проявляти творчий підхід та ініціативу

Фахові компетентності (ФК)

ФК 01 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК 02 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК 06 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

ФК 08 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

ФК 14 Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках

Програмні результати навчання (ПРН)

ПРН 01 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці

ПРН 03 Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень. формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

ПРН 04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми

ПРН 07 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики

ПРН10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.

ПРН 11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей

ПРН 12 Відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації

ПРН 14 Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач

ПРН16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Викладається у четвертому семестрі на базі курсу математичного аналізу, теорії функцій багатьох з геометрії

3. Зміст навчальної дисципліни

з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)	Кількість лекційних годин Денна	Кількість годин для практичних занять Денна	Самостійна робота
	Тема 1. Вектор-функція скалярного аргументу			
1	Лекція 1 . Практичне заняття 1,2. Означення вектор-функції скалярного аргументу. Годограф вектор-функції. Границя векторної функції. Похідна вектор-функції. Формула Тейлора. Інтеграл від вектор-функції. Завдання на СРС: Задачі [3,7] <i>Дидактичні засоби: [1,2,5]</i>	2	4	6
	Тема 2. Поняття кривої. Регулярна крива і способи її задання.			
2	Лекція 2. Практичне заняття 3,4. Елементарна крива. Проста крива. Загальна крива. Регулярна крива. Способи аналітичного задання кривої. Особливі точки плоских регулярних кривих. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,5,6]</i>	2	4	6
3	Лекція 3. Практичне заняття 5,6. Дотична пряма до кривої і супровідний тригранник кривої. Дотична пряма кривої. Стична площина кривої. Головна нормаль і бінормаль кривої. Тригранник Френе. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,4,5,6]</i>	2	4	6

	Тема 3. Поняття теорії кривих, пов'язані з поняттями кривини та скруту.			
4	Лекція 4. Практичне заняття 7,8. Довжина дуги кривої. Природна параметризація. Кривина кривої. Скрут кривої. Формули Френе. Натуральні рівняння кривої. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,4,5,6]</i>	2	4	6
	Тема 4. Теорія поверхонь в евклідовому просторі.			
5	Лекція 5. Практичне заняття 9,10. . Поняття поверхні. Дотична площина та нормаль поверхні. Елементарна поверхня. Проста поверхня. Загальна поверхня. Регулярна поверхня. Способи аналітичного задання регулярної поверхні. Координатна сітка поверхні. Дотична площина і нормаль поверхні. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,4,5,6]</i>	2	4	4
6	Лекція 6. Практичне заняття 11,12. Перша квадратична форма поверхні та пов'язані з нею питання теорії поверхонь. Перша квадратична форма поверхні. Довжина кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площа області на поверхні. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,4,5,6]</i>	2	4	4
7	Лекція 7. Практичне заняття 13. Друга квадратична форма поверхні та пов'язані з нею питання теорії поверхонь. Друга квадратична форма поверхні. Кривина кривої, що лежить на поверхні. Теорема Мен'є. Головні напрями і головні кривини, формула Ейлера. Гаусова і середня кривина поверхні. Класифікація точок поверхні.	2	2	6

	<i>Завдання на СРС: Задачі [3,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,2,5,6,7]</i>			
8	Лекція 8. Практичне заняття 14. Визначні лінії на поверхні. Лінії кривини. Асимптотичні напрями та асимптотичні лінії. Геодезичні лінії, механічний зміст геодезичних, екстремальна властивість геодезичних. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [2,4,5,6,7]</i>	2	2	6
	Практичне заняття 15. Поняття про внутрішню геометрію поверхні. Предмет внутрішньої геометрії поверхні. Ізометричні поверхні, згинання. Гаусова кривина як об'єкт внутрішньої геометрії поверхні. Теорема Гауса-Боне, дефект геодезичного трикутника. Геометрія на поверхнях сталої гаусової кривини. <i>Завдання на СРС: Задачі [3,7,8]</i> <i>Дидактичні засоби: [1,5,6,8]</i>		2	6
10	Модульна контрольна робота			4
11	Розрахункова робота			10
	Залік			10
	Всього	16	30	74

4. Навчальні матеріали та ресурси

Основна література

1. Елементи диференціальної геометрії : навчальн. посіб. / Міхлін Ю. В. Кириллова Н. О., Морачковська І. О. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2020. – 44 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/d95ffe41-2455-45aa-aaee-0fdcf63c0bdb/content>

2. Конспект лекцій з курсу "Диференціальна геометрія поверхонь та багатовидів" [Електронний ресурс] : для магістрів спец. F3 "Комп'ютерні науки" / уклад.: М. В. Матюшенко, Г. В. Федченко ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Електрон. текст. дані. – Харків : НТУ "ХПІ", 2025. – 70 с. – URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/91330>

<https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/b0072949-6dc9-431b-bf0d-393d12dcb24e/content>

3. Гуран Ігор, Гутік Олег, Лисецька Олександра, Мокрицький Тарас. Диференціальна геометрія: теорія кривих і поверхонь. Львів, 2021. 326 с.

https://eprints.zu.edu.ua/39353/6/Geometr%20%281%29_merged.pdf

4. Франовський А.Ц., Постова С.А. Розв'язування задач з топології та диференціальної геометрії: методичні рекомендації для здобувачів закладів вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» (ОК "Диференціальна геометрія і топологія"). – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2024. – 38 с.

https://eprints.zu.edu.ua/39353/6/Geometr%20%281%29_merged.pdf

Додаткова література

1. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О.В. Кузьма, О.В. Суліма, Т.О. Рудик, Н.П. Селезньова та інш.; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 127 с.

<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310>

2. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія. Вища школа. Київ, 1973-276с.

3. Кованцов М.І., Г. М. Зражевська Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.І., Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Зб. задач, К., 1989-398с.

4. Методичні вказівки до вивчення теорії поверхонь другого порядку. /Укл. Н.П. Селезньова, Т.О. Рудик. _ К.: КПІ, 1992.-52с.

https://mph.kpi.ua/assets/img/books/PBF/2. Teorija_poverkh. II_porjadku.pdf

5. Селезнєва Н.П., Рудик Т.О. Диференціально-геометричні характеристики кривих: еволюти та евольвенти. *Вісник науки та освіти (Серія «Філологія», Серія «Педагогіка», Серія «Соціологія», Серія «Культура і мистецтво», Серія «Історія та археологія»)*. 2026. № 4(46). С. 4390-4403.

[https://doi.org/10.52058/2786-6165-2026-4\(46\)-4390-4403](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2026-4(46)-4390-4403)

6. Селезнєва Н.П., Рудик Т.О. Гвинтові лінії: геометрія, що рухає світ. Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Збірник наукових праць/ М-во освіти і науки України, Укр. держ. ун-т імені Михайла Драгоманова. – Випуск 109. – Київ : Видавничий дім «Гельветика», 2026. С. 183–189 <https://chasopys.ps.npu.kiev.ua/archive/109/35.pdf>

3. Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

5.1. Дидактичні матеріали:

На лекційних заняттях – Лекція (електронний варіант), пояснення, мозковий штурм, проблемні завдання

На практичних заняттях - Завдання до виконання (відповідно до семестрової планової атестації).

5.2. Технічне забезпечення: Microsoft Office Word, будь яке програмне забезпечення для виконання графічного матеріалу (за бажанням студента)

4. 6. Самостійна робота студента

Види самостійної роботи – опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв’язування задач, виконання домашньої контрольної роботи та модульної контрольної роботи (відповідно до семестрових планових атестацій).

5. Політика та контроль

6. 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3)

Співпраця студентів у розв'язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час заліку категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності, також забороняється під час заліку користуватись будь-якими гаджетами

Положення про систему забезпечення академічної доброчесності в КПІ ім. Ігоря Сікорського https://document.kpi.ua/2026_HOD-623

Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

(Положення про систему оцінювання результатів навчання в КПІ ім. Ігоря Сікорського <https://osvita.kpi.ua/node/37>)

Поточний контроль: експрес-опитування, опитування за темою заняття, написання МКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

Семестровий контроль: залік. у письмово-усній формі

Умови допуску до семестрового контролю: мінімально позитивна оцінка за МКР, зарахування розрахункової роботи, семестровий рейтинг не менше 36 балів.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

6. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

- можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за відповідною тематикою;

Перелік запитань до заліку

1. Векторна функція одного скалярного аргументу. Означення та приклади. Границя та неперервність векторної функції.
2. Диференційованість векторної функції. Теорема про властивості диференційованих векторних функцій та наслідки з неї. Диференціювання складної векторної функції одного аргументу. Формула Тейлора.
3. Поняття кривої. Способи завдання. Регулярність кривої. Особливі точки.
4. Заміна параметра на кривій. Властивість допустимої заміни.
5. неявно завдання кривої. Теорема про неявно задану криву.
6. Дотична та властивості першої квадратичної форми поверхні.
7. Дотична пряма та нормальна площина неявно заданої кривої. 8. Стична площина кривої. Теорема про стичну площину.
9. Рухомий репер кривої. Дериваційні формули. Теорема про матрицю дериваційних формул ортонормованого реперу.
10. Репер Френе кривої. Обчислювання елементів реперу Френе.
11. Довжина дуги кривої. Теорема про параметризацію кривої за допомогою довжини дуги. 12. Натуральна параметризація кривої. Критерій натуральної параметризації. 13. Формулі Френе. Означення та теорема.
14. Означення кривини кривої. Теорема про кривину.
15. Означення скруту кривої. Теорема про скрут.
16. Обчислення кривини кривої.
17. Обчислення скруту кривої.
18. Теорема про криві нульової кривини.
19. Теорема про криві нульового скруту.
20. Означення векторної функції двох скалярних аргументів. Диференціювання векторної функції
21. Поняття параметризованої поверхні. Регулярність поверхні. Приклади.
22. Криволінійні координати лінії поверхні. Завдання кривої на поверхні.
23. Дотична площина та нормаль параметризованої поверхні, їх рівняння.
24. Дотична площина та нормаль для неявно заданої поверхні.
25. Означення та властивості першої квадратичної форми поверхні.
26. Довжина кривої на поверхні. Геометричний зміст першої квадратичної форми.
27. Кут між кривими на поверхні. Критерій ортогональності сітки поверхні.
28. Площа області на поверхні.
29. Ізометричні зображення на поверхні. Теорема про ізометрії. Приклади ізометричних поверхонь. Поняття про внутрішню геометрію поверхонь.
30. Гаусове сферичне відображення поверхні. Відображення Вейнгартена.
31. Теорема про само спряженість відображення Вейнгартена.
32. Друга квадратична форма поверхні. Обчислення її коефіцієнтів.
33. Теорема про геометричний зміст другої квадратичної форми поверхні.
34. Нормальний перетин поверхні. Нормальна кривина нормального перетину. нормальні перетини в околі еліптичної, гіперболічної, параболічної точок.
35. Нормальна кривина кривої на поверхні та її властивості. Теорема Менье.
36. Обчислення нормальної кривини.
37. Головні напрямки та головні кривини поверхні. Теорема про існування головних напрямків.
38. Обчислення головних кривин та головних напрямків.
39. Основна терема теорії кривих (без доведення).
40. Асимптотичні напрямки. Існування асимптотичних напрямків.

41. Зв'язок нормальної та геодезичної кривин з кривиною кривої.
42. Асимптотичні лінії поверхні. Критерій асимптотичної лінії.
43. Повна та середня кривина поверхні, їх обчислення.
44. Лінії кривини поверхні. Теорема про існування ліній кривини.
45. Характеристична властивість сфери.
46. Критерій координатності ліній кривини.
47. Гаусовий руховий репер поверхні. Теорема по матрицю відображення Вейнгартена.
48. Теорема Ейлера та наслідки з неї.
49. Дериваційні формули Вейнгартена.
50. Класифікація точок поверхні. Характеристична властивість площини.
51. Основні рівняння теорії поверхонь.
52. Означення омбілічної точки поверхні. Критерій омбілічної точки.
53. Теорема Гауса. Основна теорема теорії поверхонь.
54. Геодезична кривина кривої на поверхні. Теорема про обчислення геодезичної кривини.
55. Напівгеодезична параметризація поверхні. Перша квадратична форма поверхні та повна кривина в напівгеодезичній параметризації.
56. Геодезичні лінії та їх властивості.
57. Критерій геодезичної лінії. Приклади.

Зразок контрольної роботи №1

1. Довести, що годографом вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \cos t + \vec{r}_2 \sin t$ є еліпс, якщо $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ – сталі вектори, і $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ – неколінеарні.
2. Показати, що проекція “ординати” довільної точки ланцюгової лінії $y = ach \frac{x}{a}$ на нормаль у цій точці є величина стала.
3. Написати параметричні рівняння ланцюгової лінії, прийнявши за параметр довжину дуги, що відраховується від вершини цієї лінії.
4. Знайти рівняння еволюти еліпса.
5. Записати рівняння нормальної площини в довільній точці кривої

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Зразок контрольної роботи №2

1. Довести, що дотичні площини до поверхні $xuz = a^3$ утворюють разом з координатними площинами тетраедр сталого об'єму.
2. Знайти рівняння нормалі до поверхні
$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = uv \end{cases}$$
 в точці $M(u = 2, v = 1)$.
3. Знайти одну зі сторін та один із кутів криволінійного трикутника $u = \pm \frac{1}{2}av^2, v = 1$, розміщеного на поверхні, в якій $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.
4. Обчислити головні кривини поверхні $x = uz$ у точці $M(1;1;1)$.
5. Знайти геометричне місце гіперболічних точок на поверхні $x = u + v, y = uv, z = u^3 + v^3$.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено

доцентом кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, кандидатом. фіз.-мат. наук

Селезньовою Надією Петрівною

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь (протокол № 10 від 24.06.2026р.)

Погоджено Методичною комісією фізико-математичного факультету¹ (протокол № 11 від 26.06.2026)

¹ Методичною радою університету – для загальноуніверситетських дисциплін.